Physique des systèmes biologiques :
Réaction-Diffusion

- Réaction = reproduction, réaction chimique, annihilation, etc.
  - Dynamique de croissance d'une population
  - Systèmes prédateurs-proies
- Effets joints Réaction et Diffusion
  - Diffusion locale: équation de Fisher
  - Croissance et formes

Multiplication
(pas de structuration spatiale)

Aspects historiques

13^{ième} siecle : Suite de Fibionacci

1662: Fondements de l'étude de la démographie (Gaunt) natalité, mortalité, age

1789: Croissance géometrique des populations jusqu'à limitation en nourriture (Malthus)

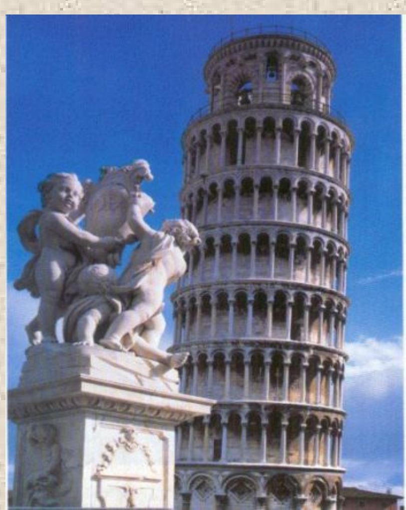
1838: Equation de Verhulst

1926 : Prédateurs-proies (Lotka-Volterra)

1974: Equation logistique (May)

Qui était Fibonacci ?

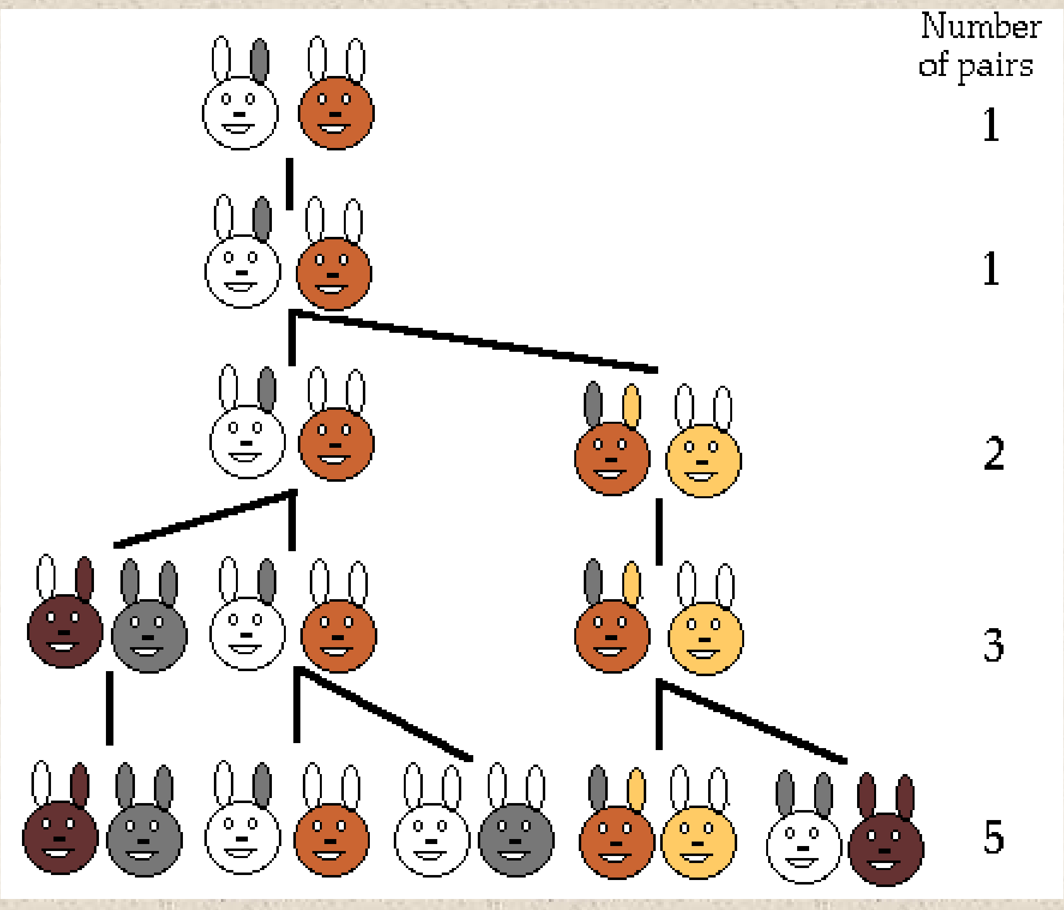
- Grand mathématicien italien du moyen age
- Pisa, Italie,~ 1175
- Contributions en arithmétique, algèbre et théorie des nombres
- Système décimal



Les lapins reproducteurs

- Initialement un couple (male+femelle)
- Etat adulte un mois après la naissance
- La femelle adulte s'accouple tous les mois et fait après un mois de gestation un couple de lapinos
- Les générations se suivent, on ne tient pas compte de la mortalité

Les chauds lapins



La suite de Fibonacci

- Règle de récurrence?

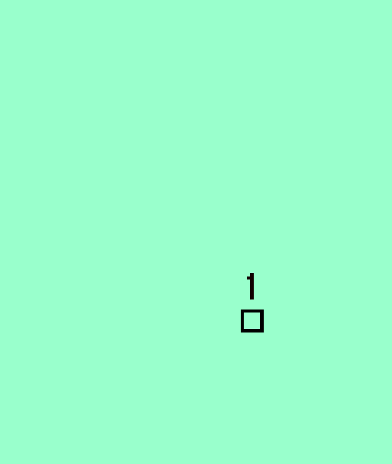
  1, 1, 2, 3, ?, ?, ….

- La réponse :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 24, …

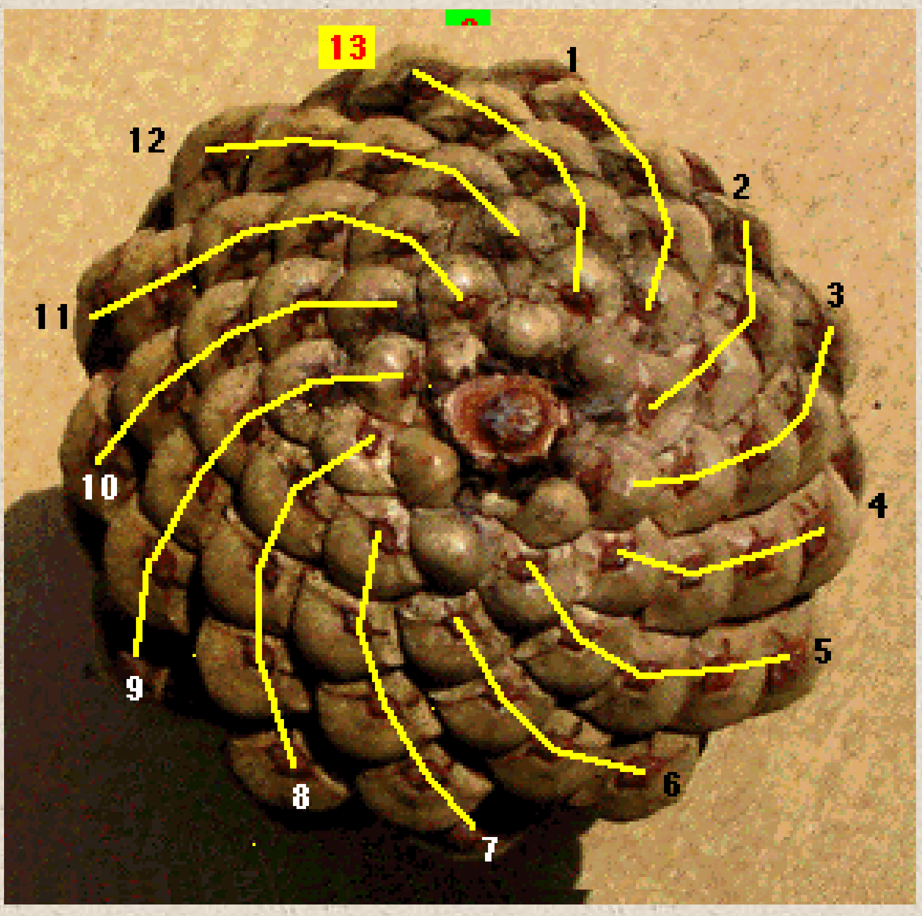
1+	1 +=	2 +=	3 +=	5 +=	8 +=	13 =	24

Pertinence pour les spirales



La suite de Fibonacci dans le monde vivant

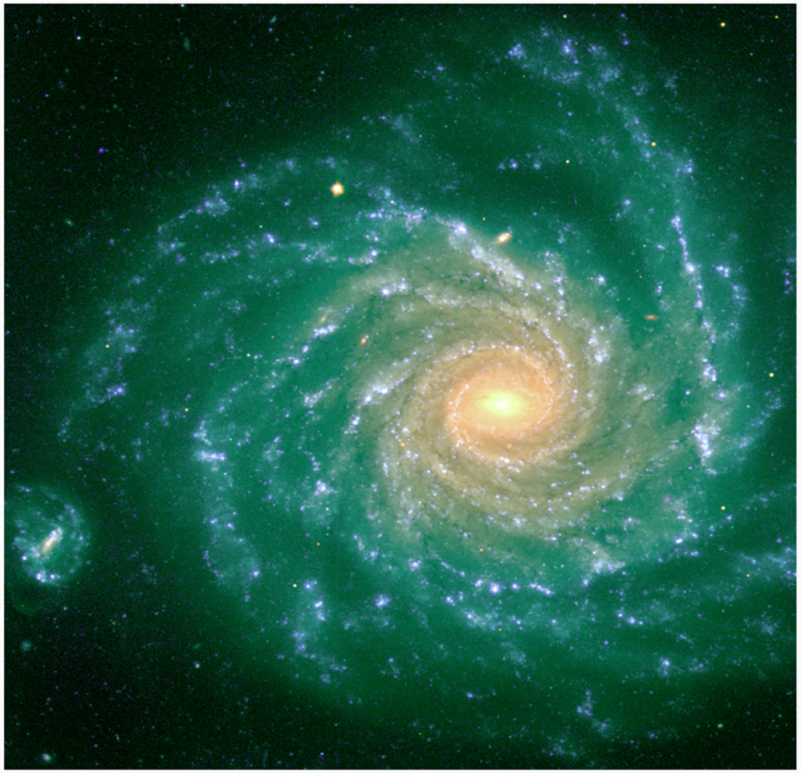
- Pommes de pins, ananas, etc…
- Spirales dans les fleurs (tournesol…)
- Spirales dans les coquillages



Spirales dans une pomme de pin:
8 orientées négativement, 13

Spirales dans les fleurs

Spirales logarithmiques



Spiral Galaxy NGC 1232 - VLT UT 1 + FORS1

ESO PR Photo 37d/98 (23 September 1998)

Le nombre d'or

- Calculons le rapport de deux nombres successifs de Fibonacci :

$$2 \div 1 = 2$$

$$3 \div 2 = 1{,}5$$

$$5 \div 3 = 1{,}666$$

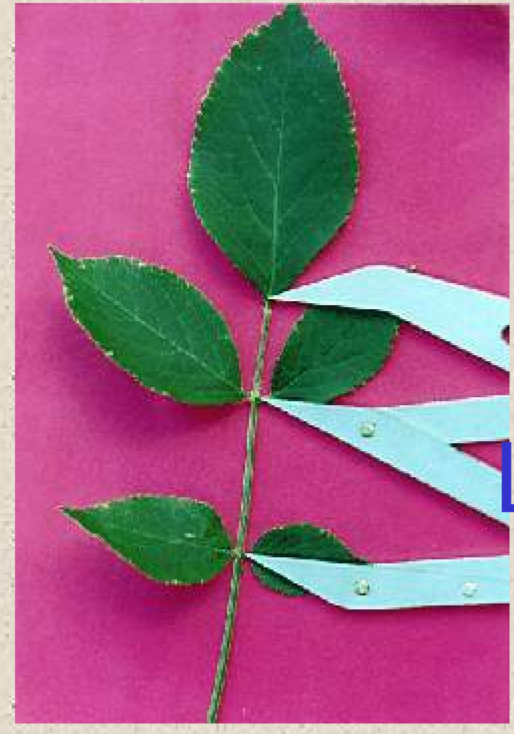
$$8 \div 5 = 1{,}6$$

$$13 \div 8 = 1{,}625$$

$$21 \div 13 = 1{,}615$$

Autre méthode pour calculer le nombre d'or

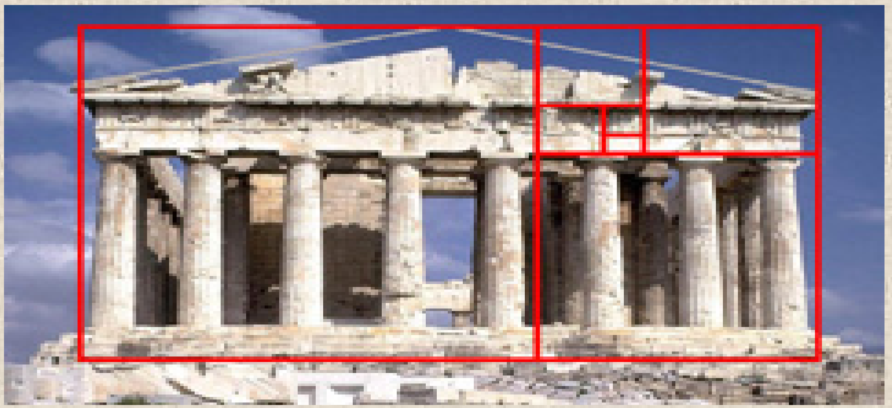
- Prendre n'importe quel nombre **x**
- Calculer $y = 1/x$
- Calculer $1 + y$
- Répéter ces étapes un grand nombre de fois… la suite converge vers G
- $G = 1 + 1 / G = 1{,}618...$



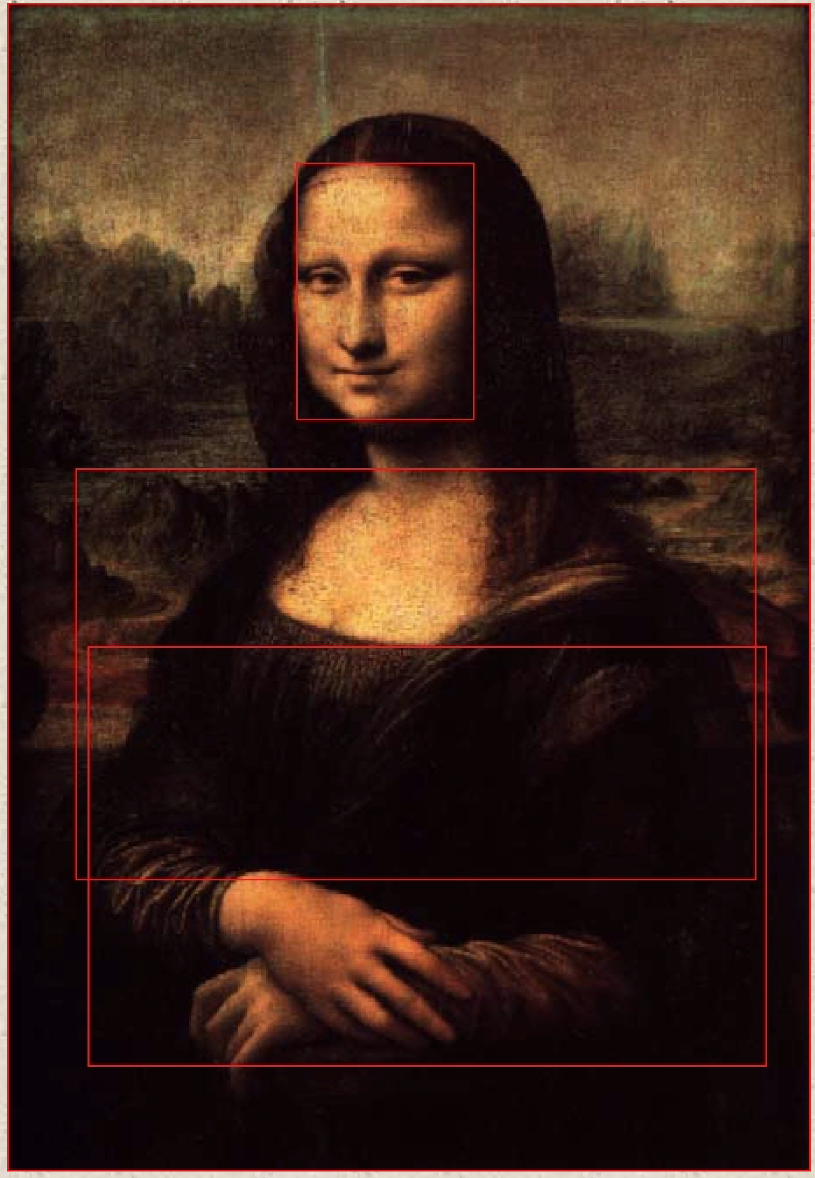
Le nombre d'or dans la nature

Dans l'Art et l'Architecture

Grande muraille de Chine



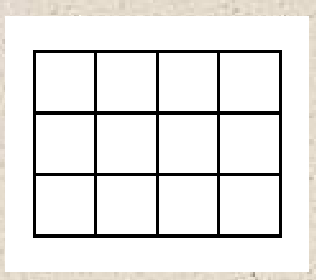
Parthénon, Grèce

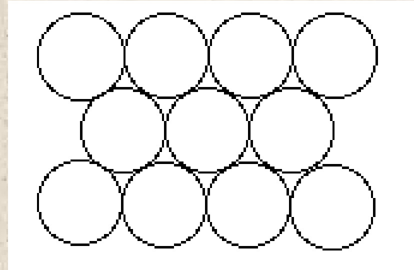


La Joconde

Pourquoi tant de spirales ?

- Permet une formation compacte

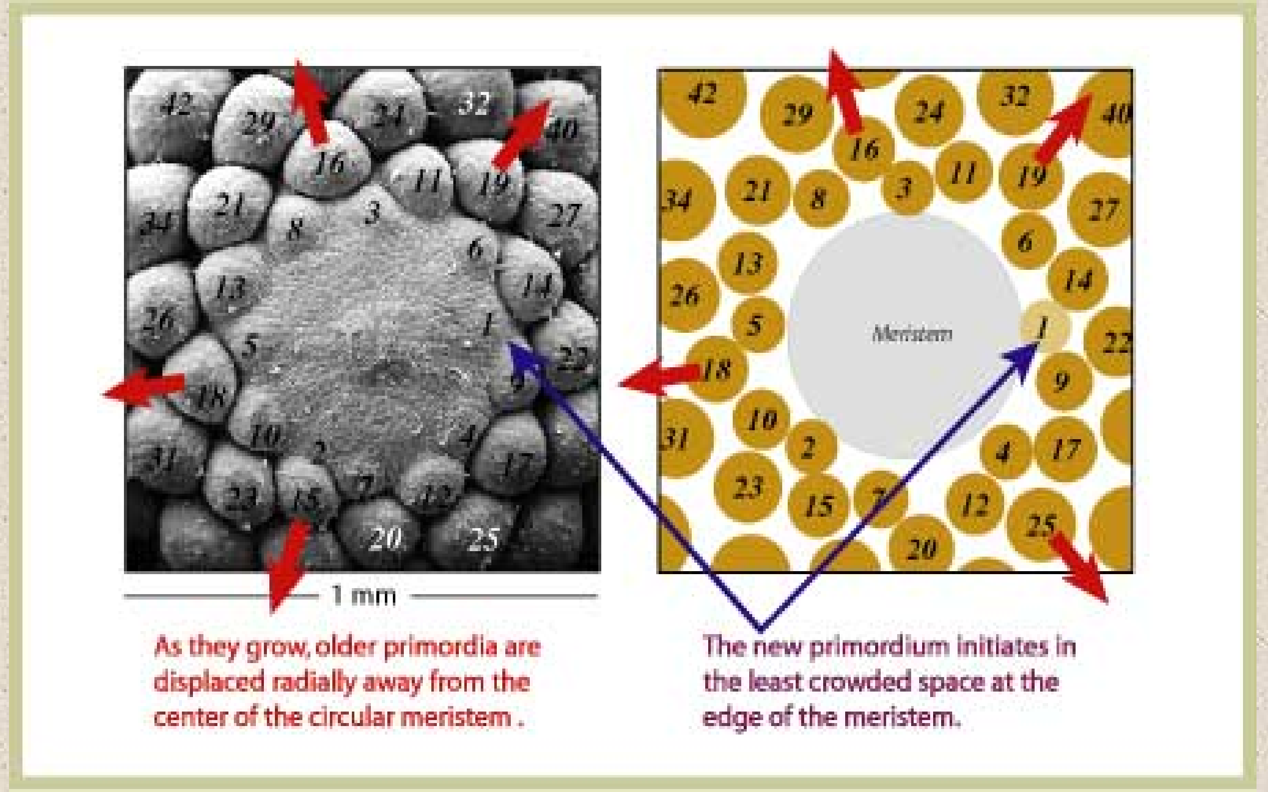




- Les fleurs et pommes de pins sont des formes en croissance

Fibionacci pour la croissance

Les pousses sont déplacées vers l'extérieur



Autres illustrations

Modèle de May (limitation des ressources)

1974: Equation logistique (May)

Reproduction annuelle, on suit le nombre d'individus d'une année/génération à la suivante

$$\mathbf{N(g+1) = r\, N(g)\, [\, 1 - N(g)/C\,]}$$

C joue le rôle d'une capacité

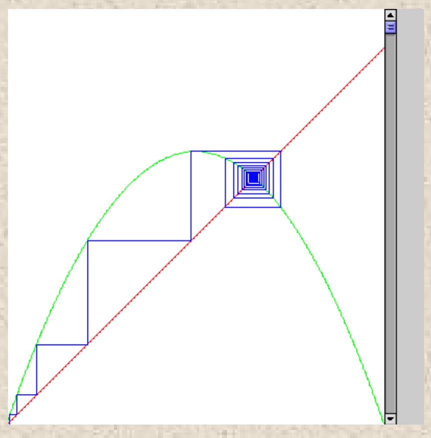
r est le taux de multiplication en absence de limitation de ressources

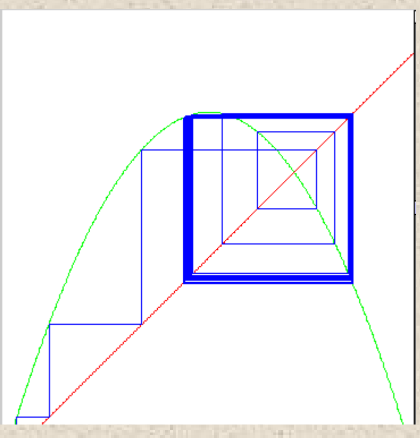
Comportements dynamiques

- A faible N(g), les ressources ne sont pas limitantes (croissance exponentielle)
- Si N(g) est comparable à C, la mortalité est très forte (chute importante de la population)
- On reste donc aux valeurs intermédiaires: construction en escalier pour trouver graphiquement l'évolution de N(g)
- A grand g, état stationnaire, cyclique ou chaotique

Solution graphique

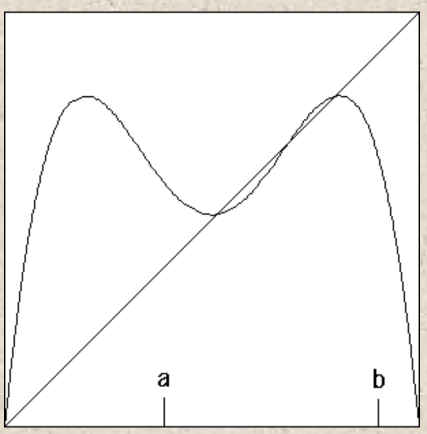
Point
fixe

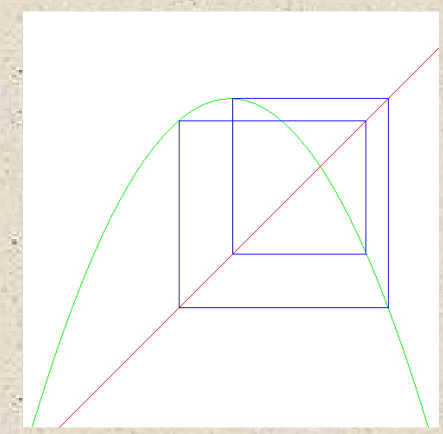




Période 2

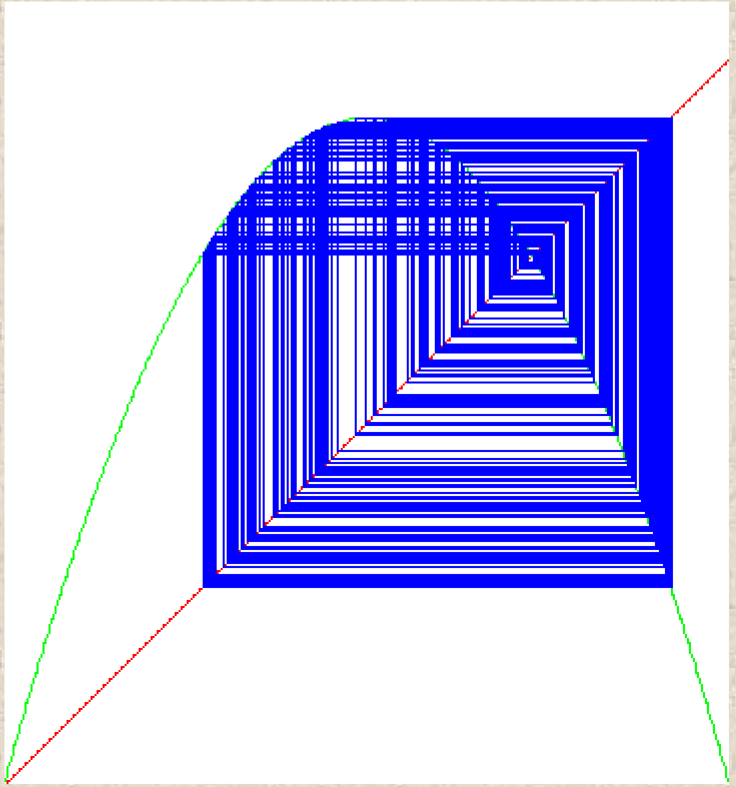
Dynamique
pour 2
itérations



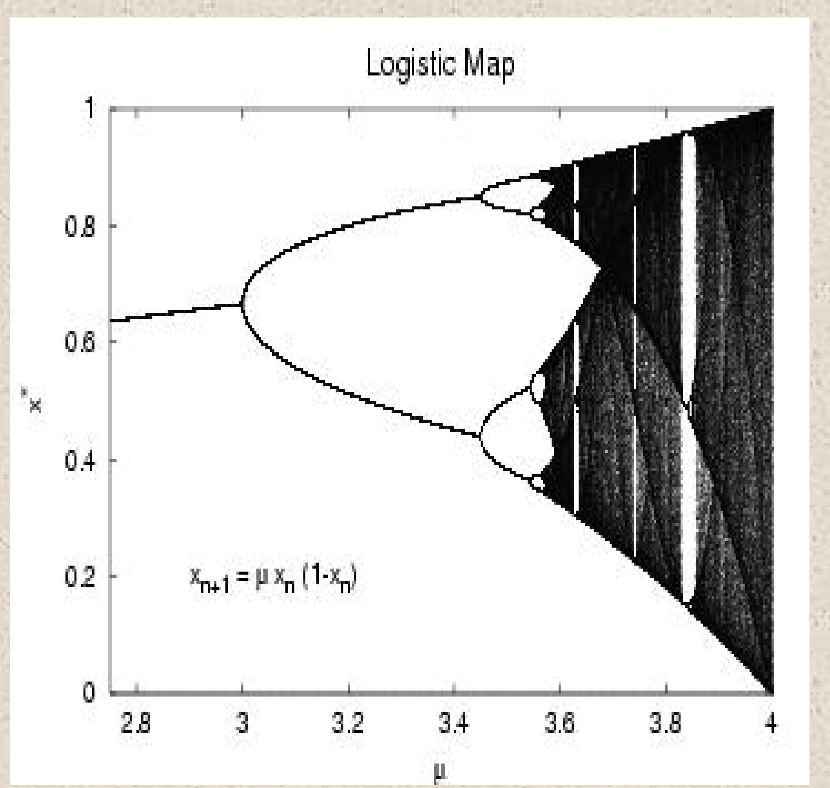


Période 4

Comportement en fonction de r



Dynamique chaotique r>3,5…



Suite de points de bifurcation

Prédateurs - Proies

1926 : Lotka et Volterra
2 espèces, une herbivore (à la May), une carnivore, donc limitée par le nombres d’herbivores

Exemple classique: le lièvre et le lynx

Dynamique des populations

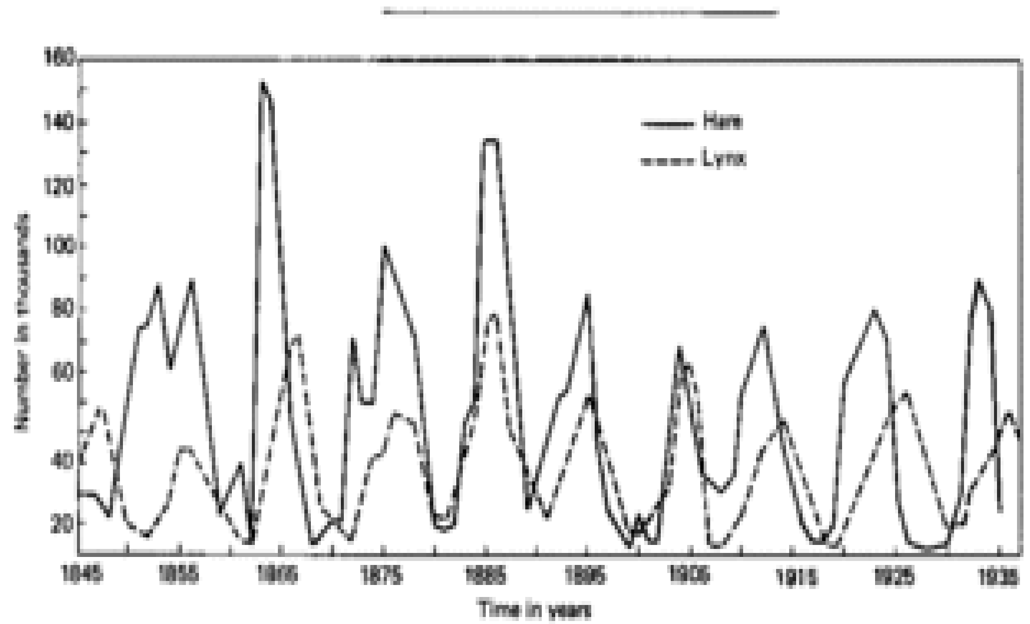


Figure 9-3. Changes in the abundance of the lynx and the snowshoe hare, as indicated by the number of pelts received by the Hudson's Bay Company. This is a classic case of cyclic oscillation in population density. (Redrawn from MacLulich 1937.)

Données du Canada sur un siècle

Equations de Lotka-Volterra

- R = nombre de lapins, F = nombre de lynx
- Dynamique en temps continu

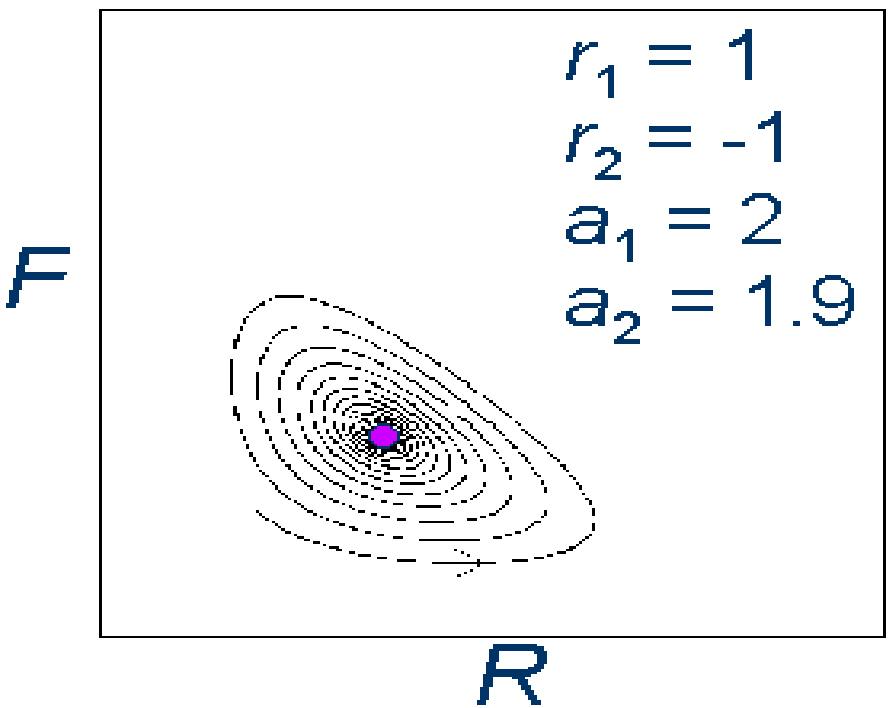
- $d\,R(t) / d\,t = r_1 R [1 – R – a_1 F]$

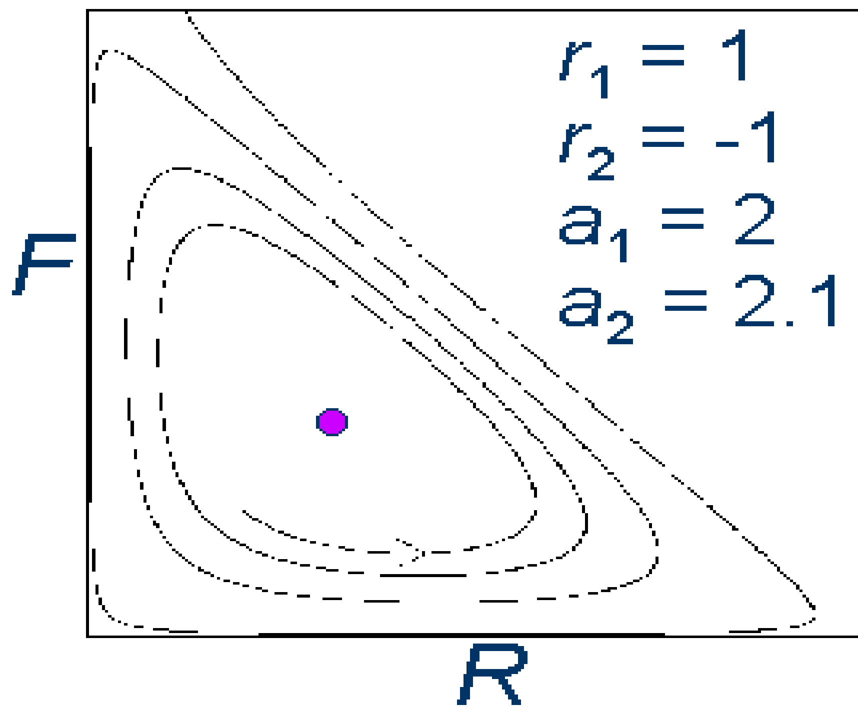
- $d\,F(t) / d\,t = r_2 F [1 – F + a_2 R]$

Solution graphique

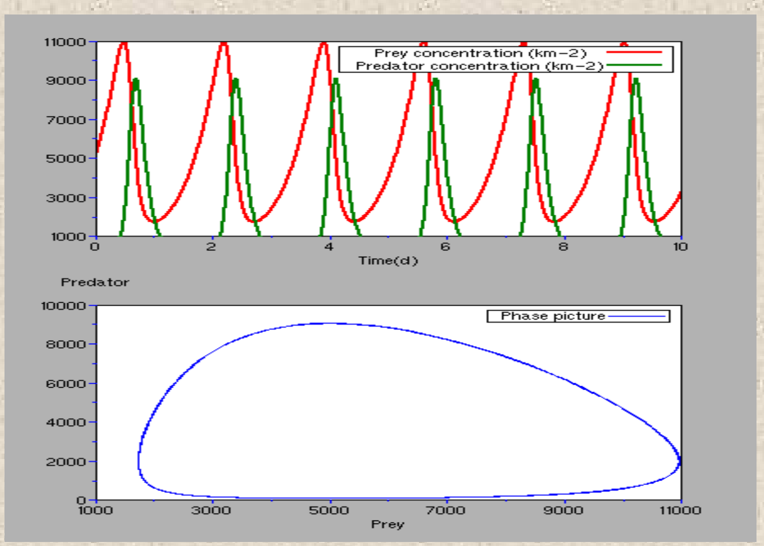
Stable Focus (Predator-Prey)

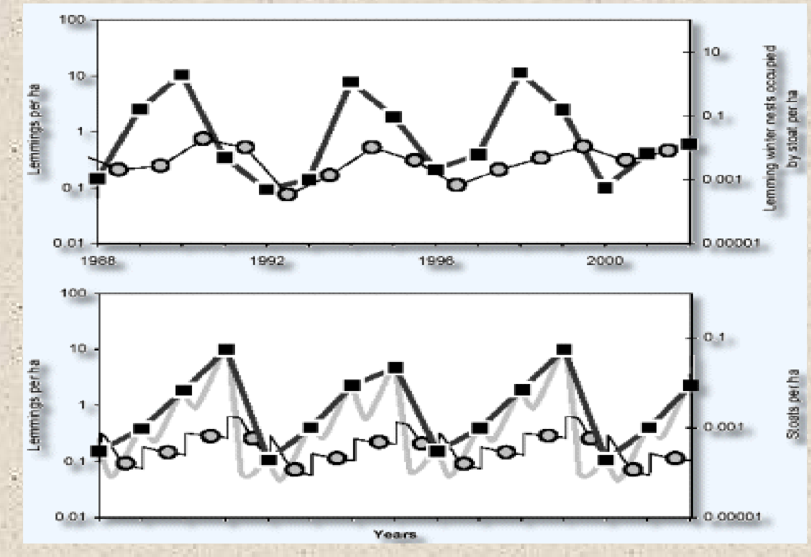
$$r_1(1 - a_1) < -r_2(1 - a_2)$$

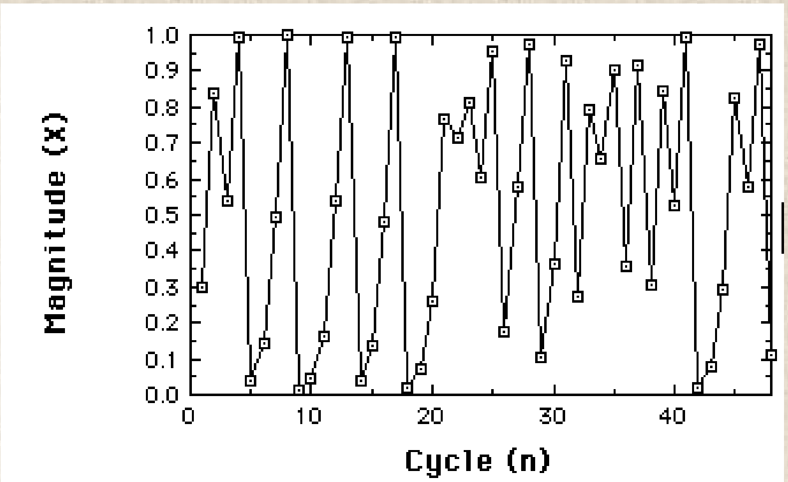


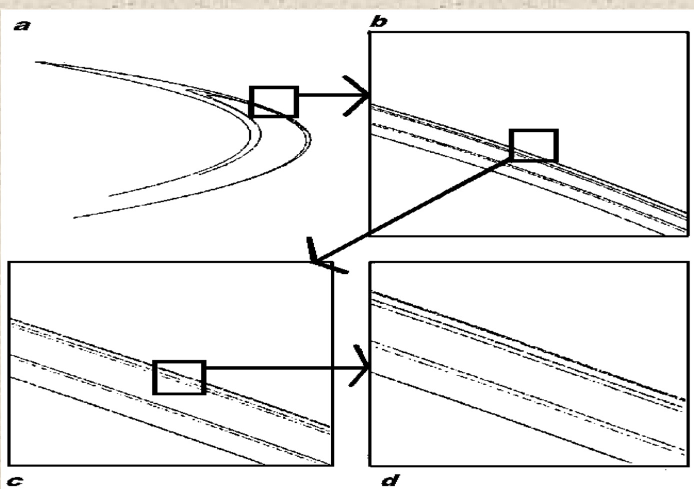


Points fixes, cycles et chaos









Influence de l'espace : Réaction-Diffusion

La répartition spatiale est-elle homogène ?
A-t-on de la turbulence (chaos spatio-temporel) ?

Equation de Fisher
Patterns de Turing

Sir Ronald Fisher

- 1890-1962
- Statisticien et généticien
- Vulgarise les mathématiques pour les biologistes et la biologie pour mathématiciens

Equation de Fisher

$$\partial_t A = \nabla^2 A + A - A^3$$

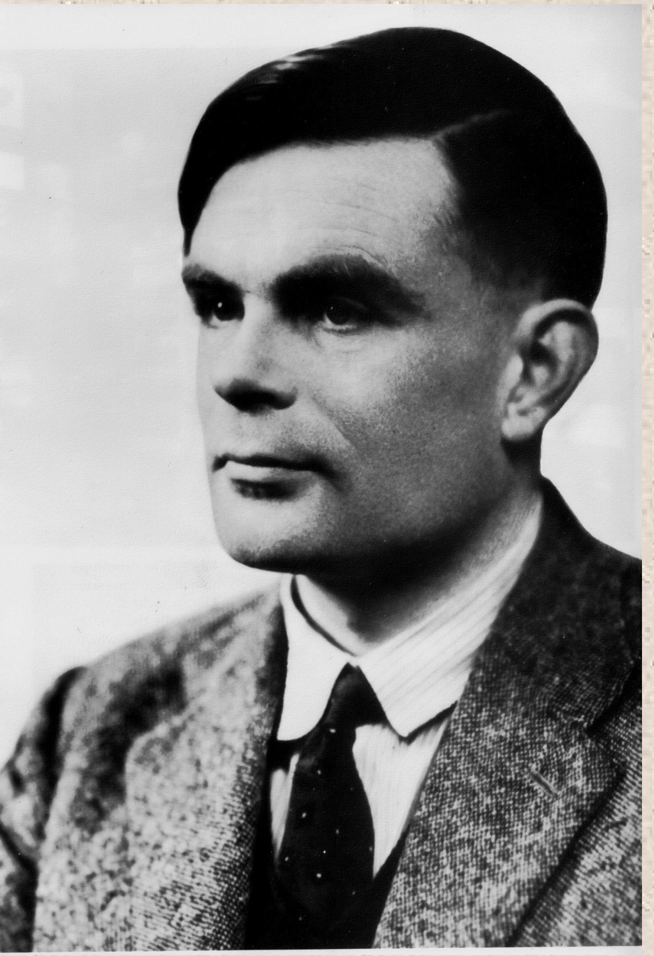
Généralise la dynamique des populations à la May à un système dans l’espace (à 1, 2 ou 3 dimensions) en combinant la reproduction et la diffusion

Décrit l’invasion spatio-temporelle d’une nouvelle espèce

Solutions particulières en forme de front

Exemple d’applications: croissance forestière, envahissement de nouvelles espèces, croissance de colonies bactériennes, propagation de cultures humaines

Equations d’Alan Turing (1912-1954)



- Conçoit la machine de Turing (ordinateur abstrait) en 1930
- Résoud le code des U-boat, (bataille de l’ Atlantique)
- Propose l’approche nonlinéaire pour la croissance biologique

http://www.turing.org.uk/

Réaction-diffusion : Equations de Turing pour 2 espèces

$$U_t = D_U \Delta U + a - U - \rho R(U,V),$$
$$V_t = D_V \Delta V + c(b - V) - \rho R(U,V),$$

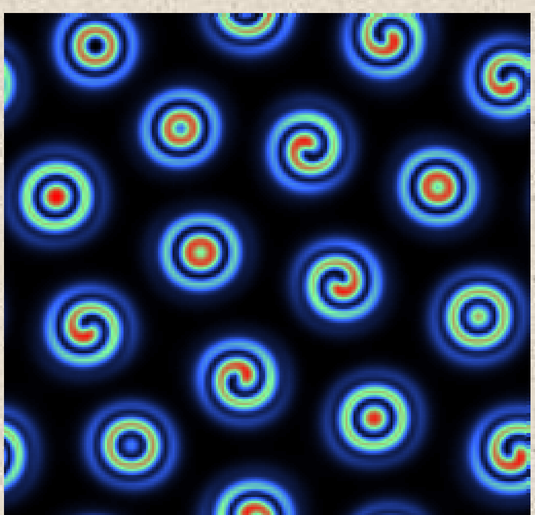
where $R(U,V) = \dfrac{dUV}{e + fU + gU^2}.$

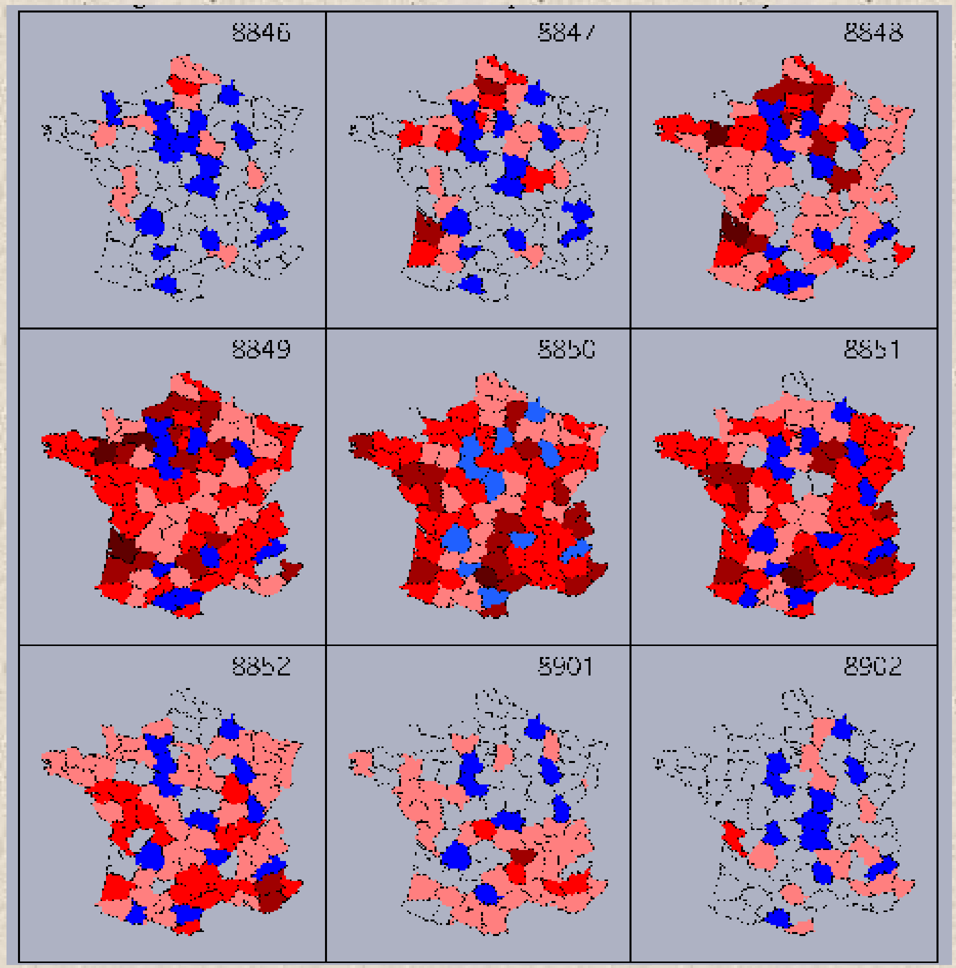
Domaine d'espace : rectangle ou autre

Conditions aux bords:

sans flux, ou concentration nulle

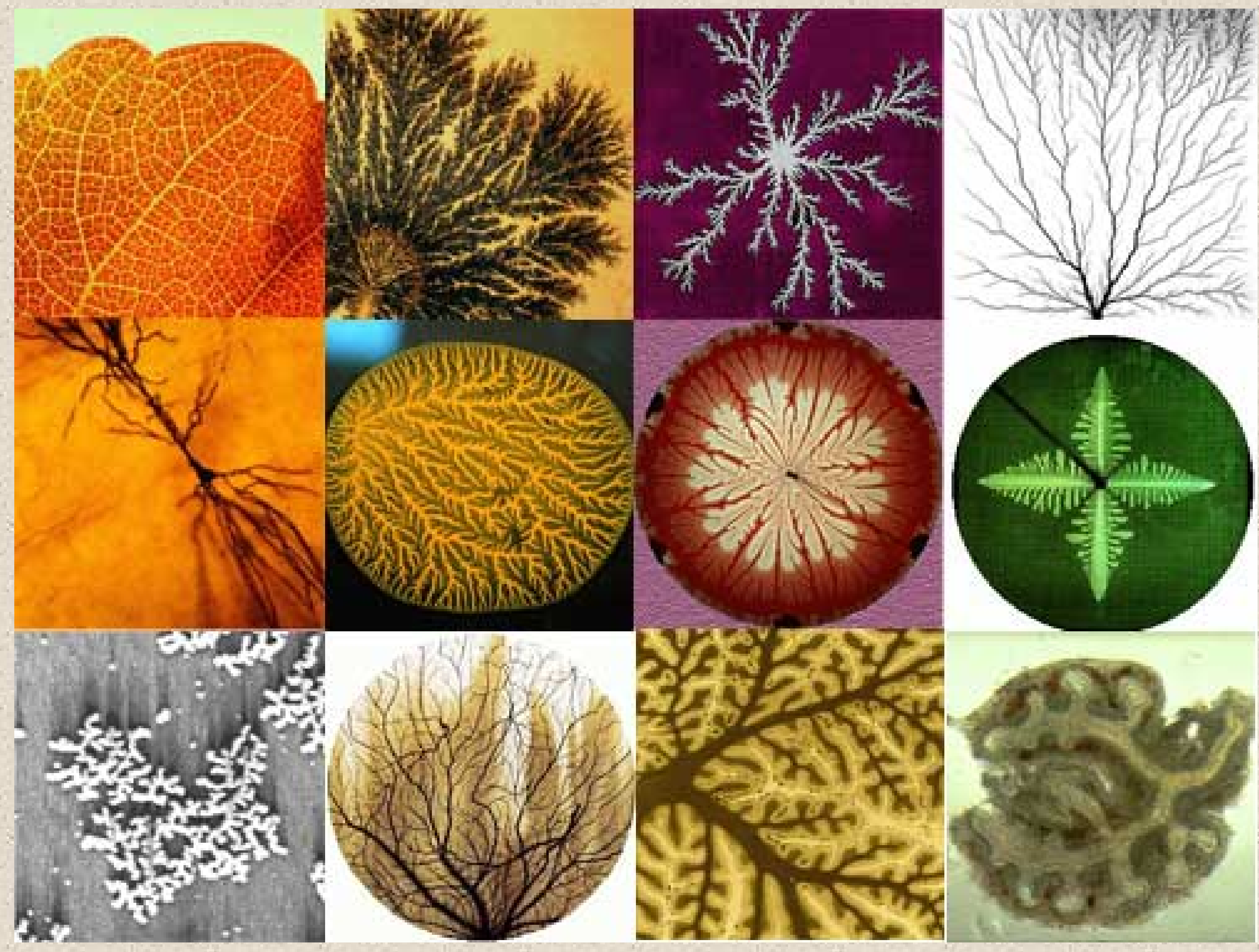
Réaction et diffusion

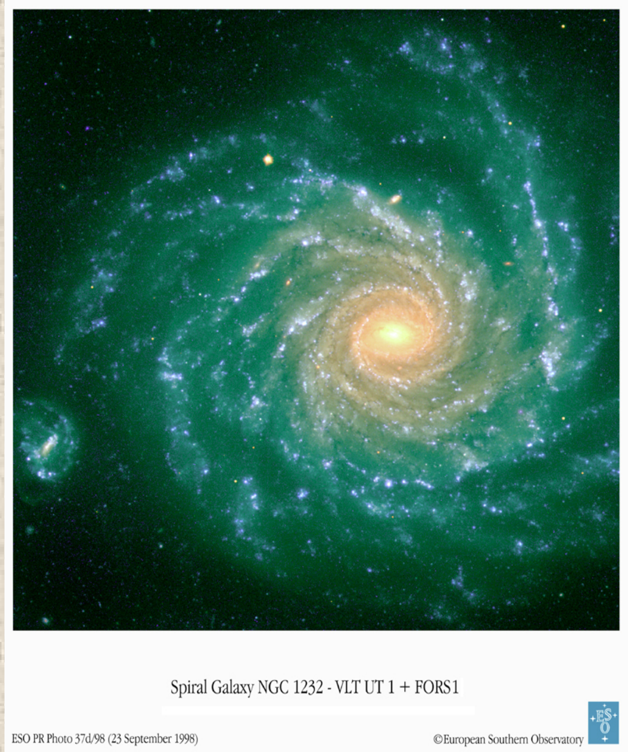




Epidémie de grippe

Croissance et forme
(D'ArcyThompson)

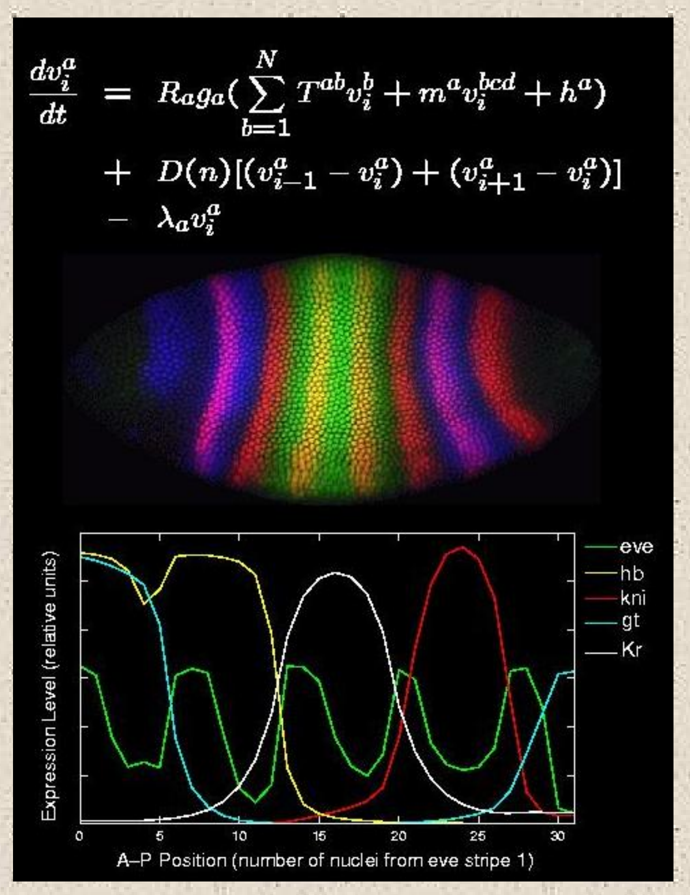



Spiral Galaxy NGC 1232 - VLT UT 1 + FORS1
ESO PR Photo 37d/98 (23 September 1998)
©European Southern Observatory

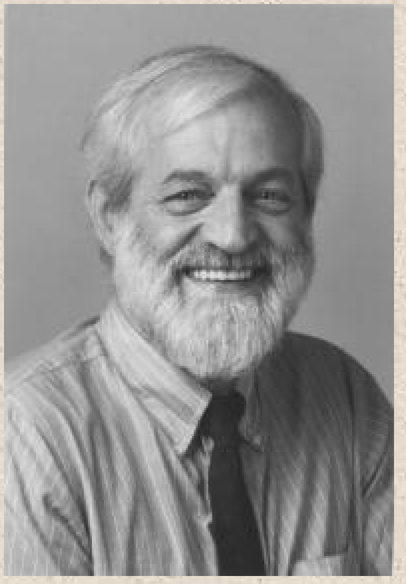

(c) Jörg Luchtenberg

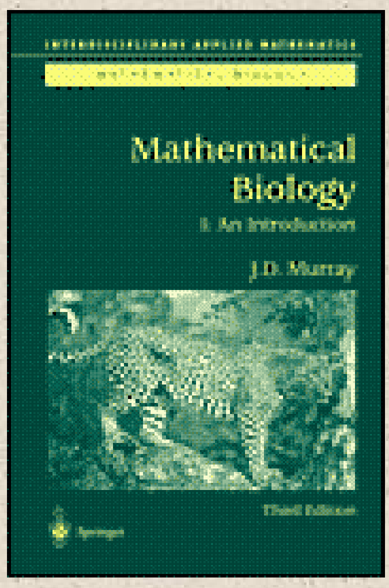
L'oeuf de drosophile

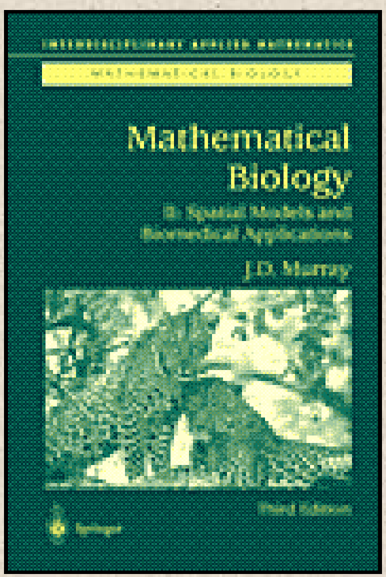
- Gènes maternels (RNAm)
- Gènes de segmentation
- Gènes homéotiques



James Murray
(livre : ***Mathematical Biology***)



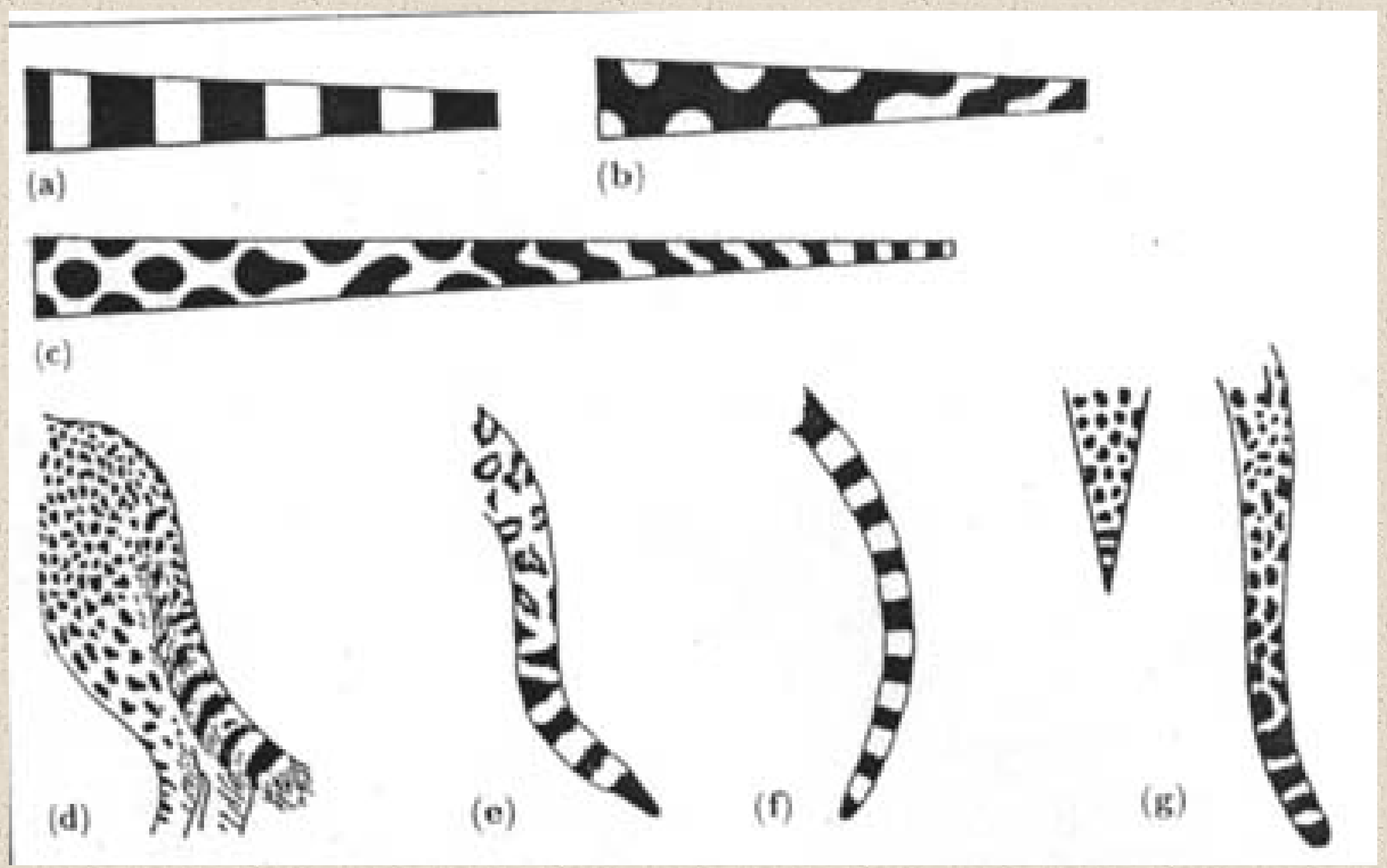




University of Washington, Seattle
Oxford University, Oxford
http://www.amath.washington.edu/people/faculty/murray/

Rayures (cas des serpents)

Les taches du léopard : morphogénèse embryonnaire



(a) (b) (c) Simulations (d) Guépard

(e) Jaguar (f) Modèle analytique (g) Léopard

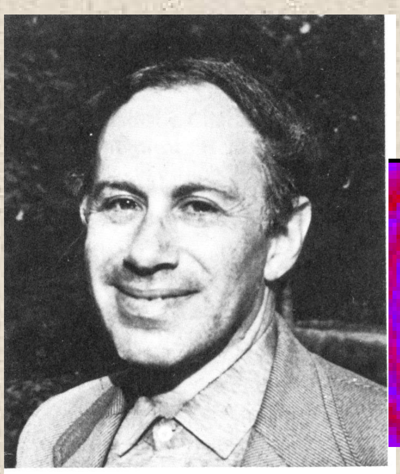
Autres cas de “patterns”

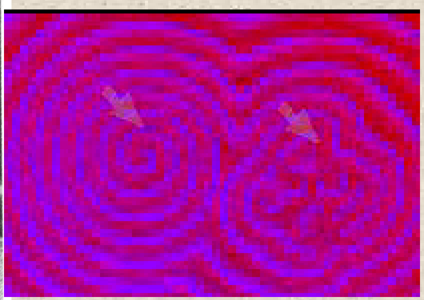
Réaction de Belousov-Zhabotinsky

Boris P. Belousov

(URSS)

Anatol M. Zhabotinsky

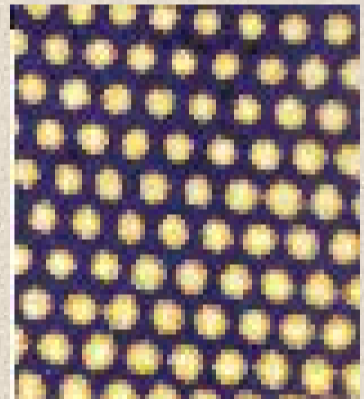




(URSS)

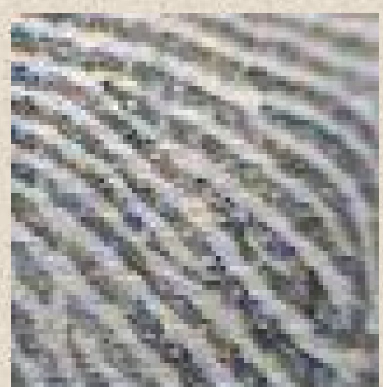
Réactions chimiques hors équilibre; cycles et chaos

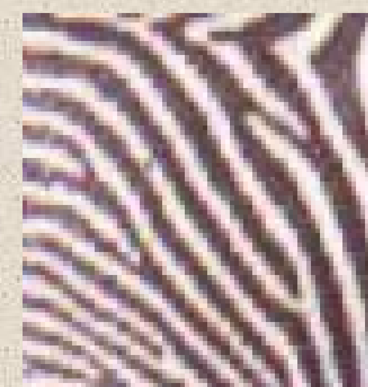
Réactions avec l'acide chloride-Iodide-Malonique (ACIM)



ACIM taches

ACIM rayures





poisson léopard empreintes digitales zébre